Zastosowania pochodnych cząstkowych

Romuald Lenczewski

Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Kwiecień 2020

Zastosowania pochodnych cząstkowych

1. Płaszczyzna styczna
2. Pochodna kierunkowa
3. Gradient
4. Minima i maksima funkcji dwóch zmiennych

Płaszczyzna styczna

Odpowiednio gładkie funkcje $z = f(x, y)$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0) posiadają płaszczyznę styczną do wykresu tej funkcji w tym punkcie.

Definicja

Załóżmy więc, że istnieją pochodne cząstkowe funkcji $f = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) i że są one ciągłe w pewnym otwartym otoczeniu punktu (x_0, y_0). Wtedy równanie

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

jest równaniem *płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji* $f(x, y)$ *w punkcie* (x_0, y_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Płaszczyzna styczna

Uwagi

1. Przypomnijmy wzór na prostą styczną do wykresu funkcji $f(x)$ w x_0:
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$
Widać tu podobieństwo: równanie płaszczyzny stycznej to dwuwymiarowy analogon równania prostej stycznej.
2. Płaszczyzna styczna nie zawsze istnieje. Przykładowo, funkcja
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
nie ma płaszczyzny stycznej dla $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3. Istnienie pochodnych cząstkowych w punkcie (x_0, y_0) nie wystarcza, aby powierzchnia miała płaszczyznę styczną w tym punkcie, ale ich ciągłość już to gwarantuje.

Płaszczyzna styczna

Przykład: $z = -x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

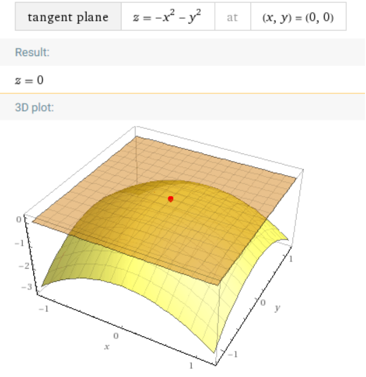
Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \Rightarrow f_x(0,0) = 0 \\ f_y &= -2y \Rightarrow f_y(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Ponieważ $z_0 = 0$, równanie płaszczyzny stycznej ma postać:

$$z = 0$$

Płaszczyzna styczna



Płaszczyzna styczna do $z = -x^2 - y^2$ w punkcie $(0, 0)$.

Made with: WolframAlpha®

Płaszczyzna styczna

Przykład: $z = f(x,y) = -x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Mamy

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \Rightarrow f_x(1,0) = -2 \\ f_y &= -2y \Rightarrow f_y(1,0) = 0. \end{aligned}$$

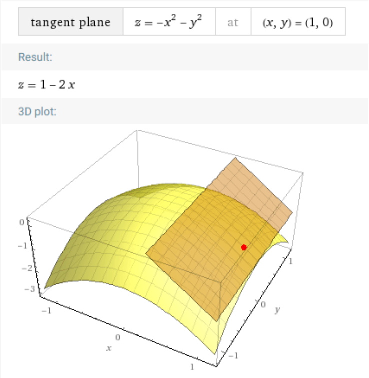
Ponieważ $z_0 = -1$, więc równanie płaszczyzny stycznej ma postać:

$$z + 1 = -2(x-1) + 0(y-0)$$

czyli

$$z = -2x + 1$$

Płaszczyzna styczna



Płaszczyzna styczna do $z = -x^2 - y^2$ w punkcie $(1, 0)$.

Made with:*WolframAlpha*®

Płaszczyzna styczna

Przykład: $z = f(x,y) = -x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Mamy

$$\begin{aligned} f_x &= -2x \Rightarrow f_x(1,-1) = -2 \\ f_y &= -2y \Rightarrow f_y(1,-1) = 2 \end{aligned}$$

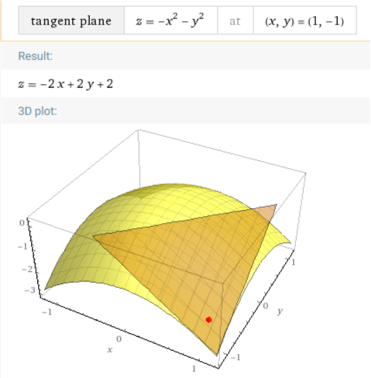
Ponieważ $z_0 = -2$, więc równanie płaszczyzny stycznej ma postać:

$$z + 2 = -2(x-1) + 2(y+1)$$

czyli

$$z = -2x + 2y + 2$$

Płaszczyzna styczna



Płaszczyzna styczna do $z = -x^2 - y^2$ w punkcie $(1, -1)$.

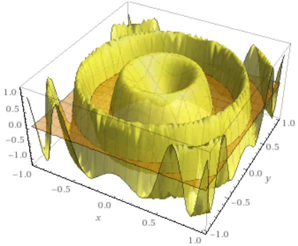
Made with: *WolframAlpha*®

tangent plane	$z = \sin(10\,x^2 + 10\,y^2)$	at	$(x, y) = (0, 0)$

Result:

$z = 0$

3D plot:



Odrobina szaleństwa:

Płaszczyzna styczna do $z = \sin(10x^2 + 10y^2)$ w punkcie $(0, 0)$.

Made with: *WolframAlpha*®

Półsfera

Znajdziemy równanie płaszczyzny stycznej do półsfery $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ w dowolnym punkcie (x_0, y_0). Mamy

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} = \frac{-x_0}{z_0}, \\
f_y &= \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} = \frac{-y_0}{z_0}
\end{aligned}
$$

gdzie $z_0 = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$. Zatem płaszczyzna styczna w (x_0, y_0, z_0) ma postać

$$z = z_0 - \frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

Pochodna kierunkowa

Definicja

Załóżmy, że $f(x, y)$ jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$ i niech $\vec{v} = (a, b)$ będzie wektorem jednostkowym, czyli

$$|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2 = 1.$$

Wtedy, *pochodną kierunkową funkcji* $f(x, y)$ *w punkcie* (x_0, y_0) *w kierunku* $\vec{v}$ jest liczba

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}$$

o ile ta granica istnieje.

Definicja

Załóżmy, że $f(x, y, z)$ jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}((x_0, y_0, z_0), r)$ i niech $\vec{v} = (a, b, c)$ będzie wektorem jednostkowym, czyli

$$|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Wtedy, *pochodną kierunkową funkcji* $f(x, y, z)$ *w punkcie* (x_0, y_0, z_0) *w kierunku* $\vec{v}$ jest liczba

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

o ile ta granica istnieje.

Pochodna kierunkowa

Notacja wektorowa

Korzystając z notacji wektorowej, możemy napisać

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{r_0}) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\vec{r_0} + t\vec{v}) - f(\vec{r_0})}{t}$$

gdzie $\vec{r_0} = (x_0, y_0)$.

Pochodna kierunkowa

Interpretacja

Możemy traktować $\partial f / \partial \vec{v}(x_0, y_0)$ jako prędkość zmiany wielkości $f(x, y)$ wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) w kierunku wektora $\vec{v}$, tzn. wzdłuż półprostej o równaniu

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}^+$.

Przykład

Obliczymy pochodną kierunkową z definicji dla funkcji

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

w $(x_0, y_0) = (1,0)$ w kierunku $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{((1+\frac{t}{\sqrt{2}})^2 + (0+\frac{t}{\sqrt{2}})^2) - (1^2+0^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t/\sqrt{2} + t^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} (\sqrt{2} + t) = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Uwaga

Założenie, że $|\vec{v}| = 1$ jest istotne.
Poprzedni przykład dla $\vec{v} = (1,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) &= \ = \lim_{t\to 0^+} \frac{((1+t)^2+(0+t)^2)-(1^2+0^2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t+2t^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} (2+2t) = 2\end{aligned}$$

a więc wychodzi inny wynik.

Pochodna kierunkowa

Uwaga

Kierunek wektora też ma znaczenie.
Jeżeli $\vec{v} = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, to

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{((1-\frac{t}{\sqrt{2}})^2 + (0-\frac{t}{\sqrt{2}})^2) - (1^2+0^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{-2t/\sqrt{2} - t^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} (-\sqrt{2} - t) = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

a więc inny wynik niż dla wektora $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Pochodna kierunkowa

Uwaga

W szczególności, jednostronne pochodne cząstkowe są szczególnymi przypadkami pochodnej kierunkowej:

$$\vec{v} = (1, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = f_x^+$$

$$\vec{v} = (0, 1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = f_y^+$$

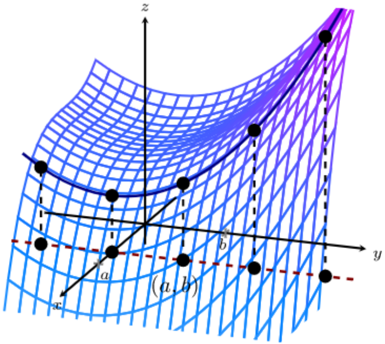
Niemniej, pochodna funkcji f w kierunku wektora $(-1, 0)$ to jest $-f_x^-$, a w kierunku wektora $(0, -1)$ to jest $-f_y^-$, tak więc troche trzeba tu uważać.

Pochodna kierunkowa

Interpretacja geometryczna

Rysujemy prostą l przez punkt (x_0, y_0) w kierunku wektora **v**, a następnie płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny xy zawierającą prostą l. Krzywa wzdłuż której płaszczyzna ta przecina wykres funkcji f ma półprostą styczną w punkcie (x_0, y_0), której współczynnik kierunkowy (tangens kąta nachylenia do płaszczyzny xy) jest równy $\partial f / \partial \vec{v}(x_0, y_0)$.

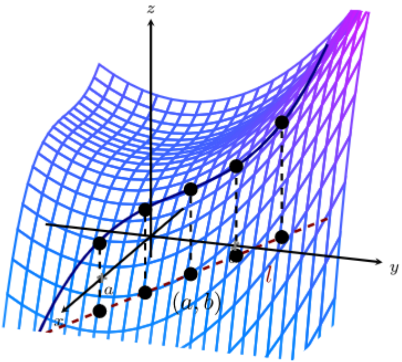
Pochodna kierunkowa



Pochodna kierunkowa funkcji wzdłuż osi y, czyli $\partial f/\partial y$, to pochodna niebieskiej krzywej (tangens kąta nachylenia stycznej w danym punkcie).

Licence:*Ximera*(*Ohio State University*)

Pochodna kierunkowa



Pochodna kierunkowa funkcji wzdłuż innego kierunku to pochodna niebieskiej krzywej (tangens kąta nachylenia stycznej w danym punkcie).

Licence:*Ximera*(*Ohio State University*)

Gradient

Aby obliczyć pochodną kierunkową możemy skorzystać z tzw. *gradientu* funkcji f.

Definicja

Jeżeli $f_x(x_0, y_0)$ oraz $f_y(x_0, y_0)$ istnieją, to *gradientem funkcji* f *w punkcie* (x_0, y_0) nazywamy wektor

$$\nabla f(x_0, y_0) := (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Gradient

Definicja

Podobnie, jeżeli $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$, oraz $f_z(x_0, y_0, z_0)$ istnieją, to *gradientem funkcji* $f(x, y, z)$ *w punkcie* (x_0, y_0, z_0) nazywamy wektor

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) := (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)).$$

Jeżeli bierzemy punkty ze zbioru $A \subset D_f$, to gradient staje się funkcją i piszemy ją często bez argumentów, tzn. ∇f.

Przykład

Obliczmy gradient funkcji

$$f(x,y) = e^{xy} - x\sin y$$

w punkcie $(0,\pi)$. Mamy

$$f_x = ye^{xy} - \sin y, \quad f_y = xe^{xy} - x\cos y,$$

więc $f_x(0,\pi) = \pi$, $f_y(0,\pi) = 0$, co daje

$$\nabla f(0,\pi) = (\pi, 0).$$

Przykład

Obliczmy gradient funkcji $f(x,y,z) = 1/r$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+y^2}$ (odległość od początku układu), w dowolnym punkcie dziedziny $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Mamy

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3}, \\ f_y &= -\frac{y}{r^3}, \\ f_z &= -\frac{z}{r^3}, \end{aligned}$$

więc

$$(\nabla f)(x,y,z) = (-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

gdzie $\vec{r} = (x,y,z)$.
W szczególności, $(\nabla f)(1,1,2) = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

Gradient

Gradient pozwala łatwo obliczać pochodne kierunkowe.

Twierdzenie

Jeżeli pochodne cząstkowe f_x, f_y są ciągłe w (x_0, y_0), to

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \circ \vec{v}$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny wektorów. Podobne twierdzenie zachodzi także dla $f(x, y, z)$.

Zastosowanie

Obliczymy pochodną kierunkową funkcji

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

w punkcie $(1,0)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Mamy

$$f_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

więc

$$\nabla f(1,0) = (1,0),$$

zatem na podstawie ostatniego twierdzenia:

$$\partial f/\partial\vec{v} = (1,0)\circ(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = 2/\sqrt{5}.$$

Gradient

Uwaga

Często mówi się, że *funkcja rośnie najszybciej w kierunku gradientu*. Wynika to z faktu, że

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \circ \vec{v}$$

a wiemy, że iloczyn skalarny jest największy, gdy kąt między wektorami jest równy zeru (cosinus jest jeden), więc

$$\partial f/\partial \vec{v} \ \text{jest maksymalna} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle(\vec{v}, \nabla f(x_0, y_0)) = 0$$

a najmniejszy, gdy kąt jest równy π (cosinus jest minus jeden), więc

$$\partial f/\partial \vec{v} \ \text{jest minimalna} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle(\vec{v}, \nabla f(x_0, y_0)) = \pi$$

Dla funkcji $f(x, y, z)$ zachodzi analogiczna własność.

Gradient

Kosmiczny przykład

Kapitan statku kosmicznego zbliża się do jasnej strony Merkurego i zauważa, że zewnętrzna powłoka jego statku zaczyna się topić. Temperatura w pobliżu statku zadana jest funkcją

$$T(x,y,z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{3z}$$

w określonych jednostkach odległości. Jeżeli znajduje się w punkcie $(1,1,1)$, w którym kierunku powinien skierować statek, aby go najszybciej schłodzić?

Rozwiązanie

Mamy:

$$\nabla T = (-e^{-x}, -2e^{-2y}, 3e^{3z})$$

tak więc

$$-\nabla T(1,1,1) = (1/e, 2/e^2, -3e^3)$$

to pożądany kierunek dla kapitana.

Definicja

1. Mówimy, że $f(x,y)$ ma *maksimum lokalne* w $(x_0, y_0) \in D_f$, jeżeli istnieje $\mathcal{O} = \mathcal{O}((x_0, y_0), r)$:
$$f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0)$$
dla wszystkich $(x,y) \in \mathcal{O}$.
2. Mówimy, że $f(x,y)$ ma *minimum lokalne* w $(x_0, y_0) \in D_f$, jeżeli istnieje $\mathcal{O} = \mathcal{O}((x_0, y_0), r)$:
$$f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0)$$
dla wszystkich $(x,y) \in \mathcal{O}$.
3. *Ekstremum lokalne* to minimum lokalne lub maksimum lokalne.

Definicja

1. Mówimy, że $f(x,y)$ ma *maksimum lokalne właściwe* w $(x_0,y_0) \in D_f$, jeżeli istnieje $\mathcal{S} = \mathcal{O}((x_0,y_0),r)\backslash\{(x_0,y_0)\}$:

$$f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

   dla $(x,y) \in \mathcal{S}$.
2. Mówimy, że $f(x,y)$ ma *minimum lokalne właściwe* w $(x_0,y_0) \in D_f$, jeżeli istnieje $\mathcal{S} = \mathcal{O}((x_0,y_0),r)\backslash\{(x_0,y_0)\}$:

$$f(x,y) > f(x_0,y_0)$$

   dla wszystkich $(x,y) \in \mathcal{O}$.
3. *Ekstremum lokalne właściwe* to minimum lokalne właściwe lub maksimum lokalne właściwe.

Przykłady

1. Bardzo prostym przykładem jest funkcja
$$f(x,y) = |x| + |y|$$
która ma minimum lokalne właściwe w $(0,0)$, ponieważ dla dowolnego $(x,y) \neq (0,0)$ mamy $f(x,y) > 0$.
2. Z kolei, funkcja
$$g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$
ma maksimum lokalne właściwe w $(0,0)$ ponieważ $x^2 + y^2 > 0$ dla każdego $(x,y) \neq 0$.
3. Zazwyczaj, wyznaczenie maksimów i minimów lokalnych z definicji jest niemożliwe.

Maksima i minima

Bardzo pomocne w znajdowaniu kandydatów na ekstrema (maksima i minima) lokalne są pochodne cząstkowe.

Punkt krytyczny

Punkt $(x_0, y_0) \in D_f$ nazywa się *punktem krytycznym* jeżeli

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

Punkty krytyczne to "kandydaci" na ekstrema lokalne, choć nie wszyscy.

Punkty krytyczne prowadzą do warunku koniecznego (WK) na ekstrema lokalne.

Twierdzenie

Jeżeli $f(x, y)$ *ma ekstremum lokalne w punkcie* (x_0, y_0) *oraz istnieją pochodne cząstkowe* f_x *oraz* f_y *w* (x_0, y_0)*, to*

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Nie jest to niestety warunek wystarczający.

Uzasadnienie WK

Jeżeli f ma minimum lokalne w (x_0, y_0), to dla $(x, y_0) \in \mathcal{O}((x_0, y_0), r)$ mamy

$$f(x, y_0) \geqslant f(x_0, y_0)$$

więc funkcja

$$g(x) = f(x, y_0)$$

ma minimum lokalne w x_0 jako funkcja jednej zmiennej, więc test pierwszej pochodnej mówi nam, że

$$g'(x_0) = 0,$$

ale $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$, więc $f_x(x_0, y_0) = 0$. Podobnie pokazujemy, że $h(y) = f(x_0, y)$ ma minimum lokalne w y_0, więc $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Interpretacja geometryczna

Geometryczna interpertacja ekstremum lokalnego jest następująca: jeżeli istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji w punkcie, to płaszczyzna ta jest równoległa do płaszczyzny xy, czyli jest ona postaci

$$z = z_0$$

gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$.

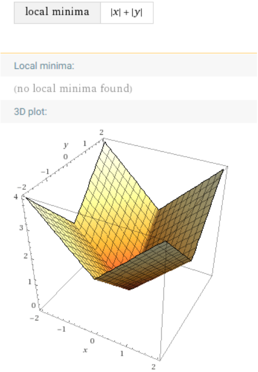
Uwaga

Należy pamiętać, że warunek konieczny, o którym mowa, dotyczy funkcji, które mają pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0). Istnieją funkcje, które mają ekstremum lokalne w (x_0, y_0), ale nie mają w tym punkcie pochodnych cząstkowych. Prostym przykładem jest tu funkcja

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

o której już wiemy, że ma minimum lokalne właściwe w $(0, 0)$. Nie ma jednak w tym punkcie pochodnych cząstkowych (nie ma też płaszczyzny stycznej). Tu nie ma sprzeczności.

Maksima i minima



Niestety, niektóre programy obliczeniowe nie wykazują takich ekstremów.

Made with: WolframAlpha®

Maksima i minima

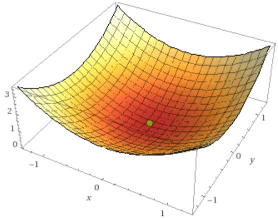
Input interpretation:

minimize	$x^2 + y^2$

Global minimum:

$\min\{x^2 + y^2\} = 0$ at $(x, y) = (0, 0)$

3D plot:



Minimum lokalne funkcji $z = x^2 + y^2$

$f_x = 2x = 0 \iff x = 0$

$f_y = 2y = 0 \iff y = 0$

punkt krytyczny $(0, 0)$

Made with: WolframAlpha®

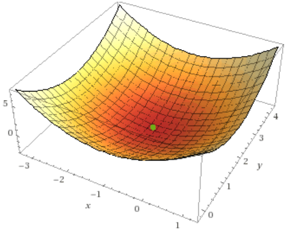
Maksima i minima

local minima	x^2+2x+y^2-4y+2

Result:

$\min\{x^2+2x+y^2-4y+2\}=-3$ at $(x, y)=(-1, 2)$

3D plot:



Minimum lokalne funkcji $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 2$.

$f_x = 2x + 2 = 0 \iff x = -1$

$f_y = 2y - 4 = 0 \iff y = 2$

punkt krytyczny: $(-1, 2)$.

Made with: *WolframAlpha*®

Punkty krytyczne dla $f(x) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

Mamy

$$f_x = 2xe^{-x^2-y^2} - 2x(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} = 2x(1-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

oraz

$$f_y = 2y(1-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Tak więc mamy układ równań:

$$\begin{aligned} x(1-x^2-y^2) &= 0 \\ y(1-x^2-y^2) &= 0 \end{aligned}$$

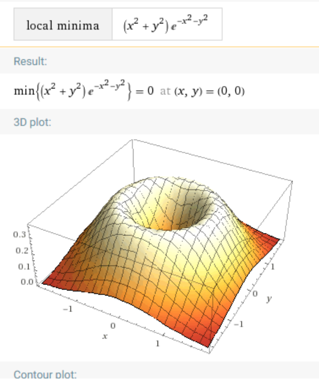
Punkty krytyczne dla $f(x) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

Możliwości:

1. $x = 0, y = 0 \Rightarrow \{(0,0)\}$,
2. $x = 0, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \{(0,1), (0,-1)\}$,
3. $y = 0, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \{(1,0), (-1,0)\}$,
4. $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

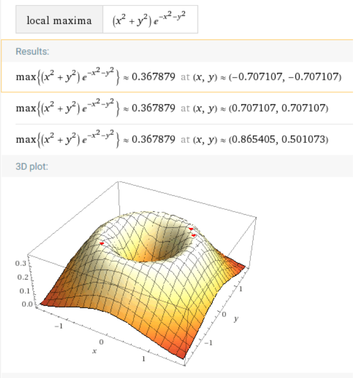
Jak widać, mamy nieskończenie wiele punktów krytycznych.

Maksima i minima



Minima lokalne funkcji $f(x) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$. Punkt $(0, 0)$ to jedyny punkt krytyczny, w którym jest minimum lokalne.

Made with: *WolframAlpha*®



Maksima lokalne funkcji $f(x) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$. Program daje tylko przykładowe punkty krytyczne, w których są maksima lokalne.
Made with: WolframAlpha®

Hesjan

Jeżeli $f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie (x_0, y_0), to *macierzą Hessego* lub Hesjanem nazywamy macierz postaci

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy w przypadku gdy pochodne mieszane są równe, przyjmuje postać

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

gdzie

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Twierdzenie

Jeżeli $f(x, y)$ *ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu w pewnym otoczeniu otwartym punktu* (x_0, y_0) *oraz* (x_0, y_0) *jest punktem krytycznym, to zachodzą implikacje*

1. $\mathcal{H} > 0 \wedge A > 0 \Rightarrow f$ *ma minimum lokalne właściwe w* (x_0, y_0),
2. $\mathcal{H} > 0 \wedge A < 0 \Rightarrow f$ *ma maksimum lokalne właściwe w* (x_0, y_0),
3. $\mathcal{H} < 0 \Rightarrow f$ *nie ma ekstremum lokalnego w* (x_0, y_0),

gdzie $\mathcal{H}$ *oraz* A *zależą od punktu* (x_0, y_0).

Maksima i minima

Uwagi

1. W pozostałych przypadkach twierdzenie nie rozstrzyga, co się dzieje w punkcie (x_0, y_0).
2. W szczególności, tak jest gdy $AC - B^2 = 0$, wtedy musimy badać funkcję innymi sposobami (np. zastosować definicję).
3. Jeżeli $AC - B^2 < 0$, to punkt (x_0, y_0) nazywa sie *punktem siodłowym* ponieważ wykres funkcji f w otoczeniu punktu (x_0, y_0) przypomina siodło.

Przykład $f(x,y) = x^2 + 2x + 2y^2 - 4y$

Mamy

$$\begin{cases} f_x = 2x+2 = 0 \iff x = -1 \\ f_y = 4y-4 = 0 \iff y = 1 \end{cases}$$

take więc jest jeden punkt krytyczny $(-1,1)$. Obliczamy

$$A = f_{xx}(-1,1) = 2, \quad B = f_{xy}(-1,1) = 0, \quad C = f_{yy}(-1,1) = 4$$

Zatem

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

oraz $A > 0$, więc funkcja ma minimum lokalne właściwe w $(-1,1)$.

Przykład $f(x,y) = x^2 - y^2$

Mamy

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 & \Longleftrightarrow \quad x = 0 \\ f_y = -2y = 0 & \Longleftrightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

take więc jest jeden punkt krytyczny $(0,0)$. Obliczamy

$$A = f_{xx}(0,0) = 2, \quad B = f_{xy}(0,0) = 0, \quad C = f_{yy}(0,0) = -2$$

Zatem

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

więc funkcja nie ma ekstremum lokalnego w $(0,0)$ (jest tam punkt siodłowy).

Przykład $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$

Mamy

$$f_x = (2x - x(x^2 - y^2))e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$f_y = (-2y - y(x^2 - y^2))e^{-(x^2+y^2)/2}$$

take więc punkty krytyczne wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{cases} x(2 - x^2 + y^2) & = & 0 \\ y(-2 - x^2 + y^2) & = & 0 \end{cases}$$

Przykład $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$

$$\begin{cases} x(2 - x^2 + y^2) & = & 0 & \iff & x = 0 & \vee & x^2 - y^2 & = & 2 \\ y(-2 - x^2 + y^2) & = & 0 & \iff & y = 0 & \vee & x^2 - y^2 & = & -2 \end{cases}$$

Z koniunkcji dwóch alternatyw otrzymujemy alternatywę 4 koniunkcji:

$$(x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge x^2 - y^2 = -2)$$

$$\vee (y = 0 \wedge x^2 - y^2 = 2) \vee (x^2 - y^2 = 2 \wedge x^2 - y^2 = -2)$$

co daje 5 rozwiązań:
$(0,0)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$.

Kontynuacja przykładu

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu mają postać:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (2-5x^2+x^2(x^2-y^2)+y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ f_{xy} &= xy(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f_{yy} &= (5y^2-2+y^2(x^2-y^2)-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{aligned}$$

Maksima i minima

Kontynuacja przykładu

Wyliczamy A, B, C w punktach krytycznych:

1. w $(0,0)$: $A = 2,\ B = 0,\ C = -2,\ \mathcal{H} = -4$, punkt siodłowy,
2. w $(\sqrt{2},0)$: $A = -4/e,\ B = 0,\ C = -4/e,\ \mathcal{H} = 16/e^2$, maximum lokalne właściwe,
3. w $(-\sqrt{2},0)$: $A = -4/e,\ B = 0,\ C = -4/e,\ \mathcal{H} = 16/e^2$, maximum lokalne właściwe,
4. w $(0,\sqrt{2})$: $A = 4/e,\ B = 0,\ C = 4/e,\ \mathcal{H} = 16/e^2$, minimum lokalne właściwe,
5. w $(0,-\sqrt{2})$: $A = 4/e,\ B = 0,\ C = 4/e,\ \mathcal{H} = 16/e^2$, minimum lokalne właściwe.

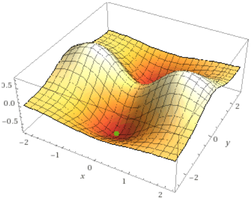
local minima	$(x^2 - y^2)\, e^{1/2(-x^2-y^2)}$

Results:

$$\min\left\{(x^2 - y^2)\, e^{1/2(-x^2-y^2)}\right\} = -\frac{2}{e} \text{ at } (x, y) = \left(0, -\sqrt{2}\right)$$

$$\min\left\{(x^2 - y^2)\, e^{1/2(-x^2-y^2)}\right\} = -\frac{2}{e} \text{ at } (x, y) = \left(0, \sqrt{2}\right)$$

3D plot:



Minima lokalne funkcji $z = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$.

Made with: WolframAlpha®

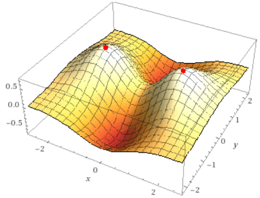
local maxima	$(x^2 - y^2)\, e^{1/2(-x^2-y^2)}$

Results:

$\max\{(x^2 - y^2)\, e^{1/2(-x^2-y^2)}\} = \frac{2}{e}$ at $(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$

$\max\{(x^2 - y^2)\, e^{1/2(-x^2-y^2)}\} = \frac{2}{e}$ at $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$

3D plot:



Maksima lokalne funkcji $z = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$.

Made with: *WolframAlpha*®

Koniec

Dziękuję za uwagę!